MATHS 1

Toutes filières

(Durée 4 heures)

Dans ce problème, étant donnée une suite $(u_n)_{n \in Z}$ de nombres réels ou complexes, on note $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ la série de terme général u_n pour n variant dans Z.

On pourra également la noter $u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + u_{-n})$ si elle est absolument convergente, c'est à dire si les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{-n}|$ convergent.

PREMIERE PARTIE

Soit φ la fonction définie sur $]o,+\infty[$ par $\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$

1. Montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$ est absolument convergente.

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t}$ converge normalement sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > o$.

3. Montrer que φ est continue sur $]o,+\infty[$.

4. Montrer que φ est de classe C^∞ sur $]o,+\infty[$.

5. Etudier les variations de φ.

6. Esquisser la courbe représentative de φ.

DEUXIEME PARTIE

$t \in]o,+\infty[$ $x \in]-\infty,+\infty[$

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{-\pi t x^2}$; pour tout réel u, on pose

$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2i\pi u x} dx$, $\hat{f}(u)$ sera appelée la transformée de Fourier de f.

1. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2i\pi u x} dx$ est une intégrale absolument convergente.

2. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$.

3. Calculer $\hat{f}(o)$.

4. On considère la suite de fonctions φ_p définies sur IR par :

$$\varphi_p(u) = \int_{-p}^{p} f(x)\, e^{-2i\pi ux} dx \qquad (p \in \mathbb{N})$$

a. Montrer que $\varphi_p(u)$ est dérivable et calculer $\varphi'_p(u)$ sur IR.

b. Montrer que la suite $(\varphi'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur IR vers Ψ définie par : $\forall u \in \mathbb{R}\ \Psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} [-2i\pi x]\, e^{-2i\pi u x} dx$

c. En déduire que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur IR et calculer $\hat{f}'(u)$.

5. Montrer que $\hat{f}$ satisfait à l'équation différentielle

$$y'(u) + 2\pi \frac{u}{t} y(u) = o$$

6. En déduire $\hat{f}(u)$.

TROISIEME PARTIE

On a toujours $f(x) = e^{-\pi t x^2}$ $t \in]0,+\infty[$, $x \in \mathbb{R}$.

On pose $F(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p)$.

1. Montrer que si la limite quand n tend vers $+\infty$ de $|u_n|^{\frac{1}{n}}$ est une valeur t strictement inférieure à 1, alors $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge (critère de Cauchy).

2. En appliquant ce critère, montrer que $\sum_{p=1}^{+\infty} e^{-\pi t (x+p)^2}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} e^{-\pi t (x-p)^2}$

   sont deux séries absolument convergentes sur IR.

   En déduire la convergence absolue de $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p)$.

3. Montrer que F est périodique de période 1.

4. Montrer que F est continue sur IR.

5. Montrer que F est développable sur IR en série de Fourier $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2i\pi nx}$

   Calculer C_n.

6. En déduire $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)$.

QUATRIEME PARTIE

Cette partie peut être abordée, soit en utilisant les résultats précédents, soit de manière autonome.

Soit $f(x) = e^{-2\pi a|x|}$ où $a > 0$.

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2 + a^2}$ pour $x \in [0,1[$